

行政院國家科學委員會專題研究計畫 成果報告

多層線性模式/線性混合模式之統計實務:以視覺圖法來輔助多層線性模式/線性混合模式建立與分析之研究

計畫類別：個別型計畫

計畫編號：NSC93-2118-M-263-001-

執行期間：93年08月01日至94年07月31日

執行單位：致理技術學院國際貿易系(科)

計畫主持人：葛湘璋

報告類型：精簡報告

報告附件：出席國際會議研究心得報告及發表論文

處理方式：本計畫可公開查詢

中 華 民 國 94 年 9 月 5 日

多層線性模式/線性混合模式之統計實務：以視覺圖法來輔助多層線性模式/線性混合模式建立與分析之研究

計畫類別： 個別型計畫 整合型計畫

計畫編號：NSC 93-2118-M-263-001-

執行期間： 93年 8月1日至 94年7月31日

計畫主持人：葛湘瑋

共同主持人：

計畫參與人員：

成果報告類型(依經費核定清單規定繳交)： 精簡報告 完整報告

本成果報告包括以下應繳交之附件：

赴國外出差或研習心得報告一份

赴大陸地區出差或研習心得報告一份

出席國際學術會議心得報告及發表之論文各一份

國際合作研究計畫國外研究報告書一份

處理方式：除產學合作研究計畫、提升產業技術及人才培育研究計畫、列管計畫及下列情形者外，得立即公開查詢

涉及專利或其他智慧財產權， 一年 二年後可公開查詢

執行單位：致理技術學院國際貿易系（科）

中 華 民 國 94 年 9 月 5 日

摘要

在社會科學的研究資料很多是屬於多層次資料,分析此類的資料通常採用多層次線性模式/線性混合模式。因為資料的結構具有層級性,多層次模式的資料探索分析、統計模式的建立及模式評估比標準複迴歸複雜。本計畫的目的主要除了提出視覺圖技巧在多層次模式分析的使用準則外,並發展、組織、及整合各種視覺圖技巧來探索多層次資料、協助建立多層次模式及模式評估。本研究所提出的視覺圖技巧主要是以 Trellis 方法為基礎而發展的。研究中將選用 ILEA 多層次資料來描述如何應用此發展出來的視覺圖技巧。經由應用此視覺圖技巧,研究者將能回答在探索多層次資料及建立多層次模式研究中常被重視的問題,如:描述個人層及群體層的原型(線性或非線性),辨識重要的預測變數及異常的受試者,選擇合適的統計模式及隨機效果的共變模式,建議可能的殘差共變模式及模式的評估與檢測。

關鍵詞：多層次資料、多層次線性模式、線性混合模式、視覺圖技巧、隨機效果共變模式、殘差共變模式、模式的評估與檢測。

Abstract

Multilevel data are very common in social science research. Hierarchical linear models/linear mixed-effects models are often utilized to analyze multilevel data. Because of the hierarchy of data structure, the exploratory analysis, statistical modeling, and examination of model-fit of multilevel data are more complicated than those of standard multiple regressions. The purpose of this study is to highlight principles and develop/organize/integrate various visual-graphical techniques to explore hierarchical data, aid multilevel modeling and examine model-fit. The proposed visual-graphical techniques are mainly based on the Trellis approach and will be demonstrated via ILEA dataset. From the application of the proposed methods, investigators can answer the research questions that most addressed in multilevel studies. These questions include characterizing or describing the patterns at both the group and individual level, identifying the important predictors and unusual subjects, choosing suitable statistical models, selecting random-effects structures, suggesting possible residuals covariance models, and examining the model-fits.

Keywords: Multilevel data, Hierarchical linear models, Linear mixed-effects models, Visual-graphical techniques, Random-effects structures, Residuals covariance models, Examination of the model-fits

前言

多層線性模式/線性混合模式(Hierarchical Linear Models/Linear Mixed-Effects Models, HLMs/LMEs)在國外是一向非常盛行的統計模式方法。它主要是用以處理分析多層次資料(hierarchical data, multilevel data)。傳統上通常是以標準複迴歸(standard multiple regression)來建立統計模式。然而,如果資料是屬於多層次資料,使用標準複迴歸並不是很恰當的方法。Darper (1995)指出如果依變數(dependent variables)的變異須由第二層或更高層的變異所解釋,那麼 HLMs/LMEs 比標準複迴歸恰當,因為 HLMs/LMEs 能分析多層次資料,而標準複迴歸只能解釋單層次資料。HLMs/LMEs 是傳統迴歸法的延伸(Kreft, 1995);如果資料顯示出層級性,那麼使用 HLMs/LMEs 是較合適的選擇。舉例而言,如果資料取自於學生(第一層)及學校(第2層)兩種層次;分析時如果只採用第一層資料(學生),那麼可能犯的錯誤是不同的學生來自於不同的學校,不同的學校有其各自不同的特色,因此,學校的特色在分析時被忽略了。如果只採用第二層資料時,那麼學生的差異將會被簡化成一個數值(如平均數),個別學生的特質被忽略了。另外一種使用第二層資料的分析方法是建立每個學校的迴歸模式,此種分析法的缺點是如果學校數目很多(如多於30所學校),那麼將有許多迴歸模式,失去了簡要的原則。另一樣缺點是學校間可能具有某些相同的特色,那麼學校可視為同一個母體所抽取出來的樣本,此時並不適宜每個全校有自己的迴歸模式。

在考慮使用 HLMs/LMEs 時,還須注意到並非所有的多層次資料均須使用 HLMs/LMEs。如果資料顯示出有主體間的變異(between-subjects variability),此時使用 HLMs/LMEs 較恰當;如果主體間沒有變異或有許多組(groups),那麼使用標準複迴歸即可(de Leeuw & Kreft, 1995)。Wang (1999)也指出在某一層次的資料中,資料若已提供了所有類別的所有資訊,這時模式中不需要隨機效果,那麼使用標準複迴歸啞變數(dummy variables)的技巧即可。如果資料具多層次且顯示出個體變異(individual variability),那麼 HLMs/LMEs 是恰當的統計分析法。如果決定採用 HLMs/LMEs,接下來是決定採用何種次模式。HLMs/LMEs 有多種次模式(Snijders & Bosker, 2000),如隨機截距(random intercept)、隨機斜率(random slope)、隨機截距與斜率(random intercept-and-slope)。

以視覺圖方法(visual-graphical methods)來探索資料(exploring data)的特質、協助建立模式(model building)及模式評估(examination of model fit)非常有用,尤其在多層次資料的分析,更是有其不可忽視的功用。在建立模式時,如能先以視覺圖技巧來選擇合適的次模式,那麼就不必要每種次模式都嘗試。然而,傳統的視覺圖技巧,如餅狀圖(pie charts)、直方圖(bar charts)、散布圖(scatter plots)、與盒鬚圖(box-and-whisker plots)等,並不足以或不適用於多層次資料的分析。視覺圖若要使用多層次資料分析,必須至少能讓研究者看出是否有主體間差異及主體本身的變異(within-subject variability)、資料特性(data characteristics)、次模式(submodels)及模式的曲線形式。因此,多層次資料的視覺圖技巧比單層次資料複雜。目前坊間的統計教課書或已發表的研究論文,並沒有提出一套系統性的視覺圖方法來探索及協助多層次資料的分析。因此,在訂定出視覺圖方法在分析多層次資料的準則及發展出一套系統性的步驟是有其必要性。

研究的目的

鑑於如何解決上述問題,本研究主要的目的在於:(1)提出視覺圖方法在多層次資料分析的準則;(2)發展、整合、並組織視覺圖技巧來協助多層次資料的分析,包括資料探索分析(exploratory data analysis)、模式建立(model building)、及模式評估(examination

of the model-fit)。研究範圍的可歸納為下列幾點：

1. 資料探索分析：研究者在從事統計分析時，常將重點置於模式建立，反而忽略了資料探索分析是統計分析的首要工作(Verbeke & Molenberghs, 2000)。而資料探索分析並非以一些統計數量（如平均數、變異數、中位數等）即可代表資料的特性，資料探索分析應儘可能獲得最多的原始資料的原型的資訊。因此，本計畫將發展、組織、並整合各種視覺圖方法來探索多層次資料。
2. 模式建立：本計畫也將以視覺圖方法來：(a)指出應變數(dependent variable)與獨立變數(independent variables)的關係，如線性或非線性；(b)辨識有助於解釋應變數的與獨立變數；(c)找出異常的主體(unusual subjects)；(d)提出有最初始(preliminary)的固定效果模式(fixed-effects models)；(e)提出可能的隨機效果共變異模式(random-effects covariance models)及其殘差共變異模式(the covariance models for residual errors)。
3. 模式評估：資料分析所得的參數估計、假設檢定、結果解釋等，通常是基於某些前提(assumptions)。如果違反這些前提，那麼估計值會有誤差、標準誤不精確、或得到錯誤的推論。

近來由於電腦繪圖軟體的研發日趨進步，結合電腦繪圖功能來從事資料分析已成為社會科學研究者的一項新的研究技巧與不可或缺的工具，也是一項必然的趨勢。然而要達成以繪圖及統計分析雙重目的，此統計套裝軟體必須具有強勢的繪圖及統計分析功能。目前著名且常為統計專家學者使用的統計套裝軟體具有建立 HLMs /LMEs 的功能者計有 SAS(Proc Mixed)、SPSS(linear mixed-effects models) 及 S-PLUS(lm), 其中 S-PLUS 更以強勢的繪圖功能著稱。多層次資料的視覺圖表現方式比單層次資料複雜。因為，在多層次資料的視覺圖呈現方式必須兼顧主體本身的形式(within-subject patterns)及主體間的行為(between-subjects behaviors)。S-PLUS 除了具有繪出傳統的統計圖(如殘差圖、盒鬚圖、散佈圖)外，他的另一項著稱的繪圖功能是 Trellis 方法(Veneables & Ripley, 1999)。Trellis 是一種多格(multi-panel)的圖示技巧，它同時能將主體本身及主體間的差異情顯示在同一張圖上，這也是以視覺圖法來呈現多層次資料的一項重要準則。由於 Trellis 法具有此項特點，本計畫的視覺圖法將以 Trellis 法為基礎而作新的整合與發展。除了強勢的繪圖功能外，S-PLUS 在建立 HLMs/LMEs 上還有一項優於其他統計軟體的功能，即 S-PLUS 允許研究者可視資料的特性建立自己的隨機效果共變異模式。若使用其他軟體，研究者只能使用軟體中既定的選擇，較沒有彈性。基於優勢的繪圖及建立 HLMs/LMEs 的功能，本計畫擬採用 S-PLUS 作為研究工具。

文獻探討

多層線性模式/線性混合模式用以處理分析多層次資料。它分為固定效果(fixed effects)及隨機效果(random effects)兩部分，低層資料的迴歸係數成為次高層的依變數。舉例而言，一個簡單的二層模式(第一層只含一個獨立變數)可表示為：

$$\text{Level-1: } Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}X_{ij} + r_{ij} \quad (1)$$

$$\text{Level-2: } \beta_{0j} = \gamma_{00} + \gamma_{01}W_j + u_{0j} \quad (2a)$$

$$\beta_{1j} = \gamma_{10} + \gamma_{11}W_j + u_{1j} \quad (2b)$$

將第二層模式代入第一層，則可得混合模式：

$$\text{Combined: } Y_{ij} = [\gamma_{00} + \gamma_{01}W_j + \gamma_{10}X_{ij} + \gamma_{11}X_{ij}W_j] + [u_{0j} + u_{1j}X_{ij} + r_{ij}] \quad (3)$$

其中 Y_{ij} 是準則變數； $\gamma_{00}, \gamma_{01}, \gamma_{10}, \gamma_{11}$ 是第 2 層次的迴歸係數或者是固定效果； X_{ij} 是第一層次的解釋變數； W_j 是第 2 層次的解釋變數； r_{ij} 是第一層次的殘差； i 指的是第一層的單位 ($i = 1, 2, \dots, n_j$)； j 指的是第 2 層次的單位 ($j = 1, 2, \dots, J$)； u_{0j} 及 u_{1j} 指的是以 W_j 為條件下，分別和第一層的截距及斜率有關的隨機效果。模式的固定效果部份 $[\gamma_{00} + \gamma_{10}X_{ij} + \gamma_{01}W_j + \gamma_{11}X_{ij}W_j]$ 是等式的一部分，它包含了迴歸係數以及有關的預測變數。等式的第 2 部分是模式的隨機效果 $[u_{0j} + u_{1j}X_{ij} + r_{ij}]$ ，它包含了第一層及第 2 層的殘差。

第一層的殘差具有獨立性、均質性、常態性(平均數為零)的假設。第二層的殘差具有獨立性、常態性的假設。隨機成份的假設可以表示為：

$$E(r_{ij}) = 0 \quad \text{Var}(r_{ij}) = \sigma^2 \quad \text{Cov}(u_{0j}, r_{ij}) = \text{Cov}(u_{1j}, r_{ij}) = 0 \quad (4)$$

$$E \begin{bmatrix} u_{0j} \\ u_{1j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{Var} \begin{bmatrix} u_{0j} \\ u_{1j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_{00} & \tau_{01} \\ \tau_{10} & \tau_{11} \end{bmatrix} = \mathbf{T} \quad (5)$$

其中 σ^2 是第 1 層次的變異數， $\tau_{00}, \tau_{01}, \tau_{10},$ and τ_{11} 是第 2 層次的變異數及共變異數的成分 (variance-covariance components)。

研究方法

本研究將以 ILEA 作資料探索分析、模式建立、及模式評估。本實例分析希望能提供所提出的視覺圖技巧在多層次資料分析的適切性，提供研究者在 HLMs/LMEs 一個完整的分析方法。

資料

本研究採用 ILEA 資料來作視覺圖法與多層資料分析的實證分析。ILEA 資料可從 <http://multilevel.ioe.ac.uk/intro/datasets.html> 下載，此資料由 Inner London Education Authority (ILEA) 所蒐集，含 140 所中學，15362 位學生，在 1985 年至 1987 年的考試成績。本研究將將資料中的變數重新定義為：時間 (Time, 0 為 1985 年、1 為 1986 年、2 為 1987 年) 學校編碼 (School) 考試分數 (Exam) 符合免費午餐的學生的比例 (FSM) VR1 學生百分比 (VR1, 語文推理的能力考試成績佔常模前 25% 學生) VR 三群的學生的百分比 (VR, 語文推理的能力考試成績分別佔常模前 25%, 50%、後 25%) 學生種族 (ESWI, 學生在 England、Scotland、Wales 或 Ireland 所出生，及非在此四區出生的學生) 學生性別 (Gender) 學校類別 (Schtype, 分 female, male, mixed) 學校教派 (Schden, 分 maintained, church of England, Roman Catholic) 在此研究中，有三年個完整資料的學校的資料才被保留使用，此研究所使用的資料共有 64 所學校，9449 位學生。

應用視覺圖方法於多層次資料分析的準則

1. 探索原始資料的分配：在研究問題確定、資料蒐集完成後，資料分析的第一步是做原始資料各變數的次數分配圖。主要目的為獲得各變數的初步印象，了解各變數的中心點、分散情形、偏態。通常可使用直方圖、長條圖、枝葉圖、盒鬚圖。

2. 敘述統計的值來了解資料結構：應用視覺圖於多層資料探索分析的第二個步驟是作敘述統計值的圖，各種敘述統計值在探索分析中各有不同的意義與目的，需視研究目的及資料結構而定。例如說，在縱向資料教育資料的探索分析中，可做個人的平均數及全體平均數的量變曲線圖 (mean profiles)，個人量變曲線圖主要目的是概述個人在每個時間點的變化，用於檢視不尋常的個體。而全體平均數量變曲線圖則可用於辨識可能的重要改變發生的時間點。研究者必須選用合適的敘述統計值來做探索分析，例如平均數受異常值的影響極大，如果資料中發現有異常個體，則採用中位數較適當。

2. 探索變數間的交互作用：交互作用是指一個獨立變數對依變數的效果是依另一個獨立變數而定 (通常為類別變數)。在教育研究中，類別變數通常為實驗情境和背景變數 (如性別、學校類別、學區等)。資料結構中若有實驗處理或背景變數則須判斷一個獨立變數對依變數的影響是否會因其他的獨立變數而有不同的效果。

3. 探索主體本身及主體間的形式：前 3 項主要將資料視為單層次資料，多層次資料探索分析主要為探索主體本身及主體間的形式。目的為揭示出一般的形式 (如函數形式為線性或非線性)，洞析依變數與自變數的關聯，辨識出不尋常的主體。

4. 模式評估：HLMs/LMEs 的模式評估中，要評估的前提可包括函數型式是否合宜、常態性假設與均質性假設。在傳統迴歸模式(traditional regression models)的模式評估主要是以殘差來作分析。HLMs/LMEs 的模式評估延伸傳統迴歸模式的觀念與作法。然而，因為 HLMs/LMEs 的各層資料均有其變異，每一層資料均須作模式評估。因此 HLMs/LMEs 的模式評估比傳統迴歸模式複雜。可使用的方式包括數值摘要及圖示法，如信賴區間、盒鬚圖、殘差圖、殘差值直方圖、殘差值常態機率圖、觀察值與適合值圖。在檢定函數型式時，如果一模式套層於另一模式之下，可使用概度比檢定，此時可分層次檢查依變數與自變數的關係圖。以分層次來作殘差分析原則來作 HLMs/LMEs 的模式評估。

利用視覺圖於多層次資料分析的技巧

一般可應用於多層次資料分析的視覺圖有平均數圖、盒鬚圖、標準差圖、及散佈圖。茲將每種圖示法的功用分析如下：

1. 平均數圖：平均數圖用於檢查組間平均數的差異情形 (如男生與女生、不同種族間、不同學校類型的考試成績的平均差異)。在縱向資料研究中，平均數圖可用於偵測可能的重要改變發生的時間點及可能的平均成長形式，如果資料中有異常值，宜使用中位數以免產生誤導。

2. 標準差圖：標準差圖用於檢視組間的變異情形，例如入學考試成績標準差較小的學校的學生比入學考試成績標準差大的學生同質性較高 (亦即入學考試成績標準差較

小的學校的學生能力較相當)。在縱向資料研究中，標準差除可用以指出不同時間點的變異情形、變異的大小、不同組隨時間而改變的變異的情形。標準差圖可與平均數圖合用，例如數學成績平均數高、標準差低的學校的學生會比入學成績平均數低、標準差高的學校的學生程度較佳、能力較相近。

3. 盒鬚圖：盒鬚圖可同時偵測中心點、變異、對稱、偏態與異常值。盒鬚圖在多層次資料分析應用極普遍，如迴歸模式的殘差圖可用以檢查是否須採用 HLMs/LMEs。一般而言，若中心點位置差異大，每個組的區間長短變異不同，則顯示出有組間差異，亦即須採用 HLMs/LMEs。如果資料包含實驗情境和背景資料，則可依實驗情境與背景資料呈現合適盒鬚圖，以檢視是否有類別間的差異。

4. 散佈圖：散佈圖用以呈現兩個變數之間的關係（如直線、2 次曲線或指數型式）。在統計模式建立中，可用以偵測是否依變數的變異和獨立變數有關。如果要偵測多組兩兩變數之間的關係，可使用散佈矩陣圖。然而散佈矩陣圖無法顯示出和第 3 個變數間的交互作用，如果要呈現和的第個變數的交互作用，可使用條件圖。

5. Trellis 方法：Trellis 方法是多格的條件圖，可用以顯示主體內形式與主體間形式的差異。Trellis 方法特別適用於多層次資料分析，因為此方法可將主體內、主體間的形式、觀察值同時呈現於 1 張圖上，可了解主體內形式、比較主體間的差異、與觀察值間的差異更容易辨別。

6. 視覺圖的呈現技巧：適當的安排視覺圖的呈現的順序（如將不尋常的個體的反應形式置於圖的最前方），能使個體潛在的形式的比較更容易。如果組數（第 2 層單位）較多，若把所有的第 2 層資料都包含於同一圖中，則不容易看出組間的差異情形，也造成解釋上的困難，此時可隨機選擇部分組群來作分析，或將第 2 層的單位再分成數個次群體，再對每個次群體作數個次群體視覺圖。

資料分析

探索原始資料的分配的例子在一般的統計專書均可見到，因此本實例分析將其他 3 個準則與模式評估為主。

圖 1 是考試成績在每個時間點整體平均數及給中位數的成長型式，整體而言，平均數與中位數在時間 1 後，增加的幅度較大。

圖 2 是每個學校在在每個時間點整體平均考試成績，從圖中可看出，學校間的平均成長形式差異大，因此有組間差異。

圖 3 是整體平均考試成績在各類別變數（種族、學校教派、學校類別、性別、VR）各個水準，在每個時間點的成長形式。圖 3a 顯示出 ESWI 開始時平均成績相近，非 ESWI 學生在時間 1 以後平均成績大幅增加。圖 3b-圖 3e 顯示出 Roman Catholic 學校、女校、女生、VR1 的平均成績較高，種族、學校類別、性別、VR 可能存在平均差異。

圖 4a 至 4f 是兩兩類別變數間在各時間點的交互作用。圖 4a 為性別及種族在整體平均成績的交互作用，此圖顯示出不論種族，女生的成績比男生高，四種交互作用的形式類似，ESWI 女生及非 ESWI 女生及的差異較小，ESWI 男生及非 ESWI 男生及的差異較小。在種族和學校類別，性別與學校教派，也可獲得相同的結論，亦即女生成績優

於男生，不會因種族或學校類別而有差異。在種族和學校教派方面，不論種族，Roman Catholic 學校成績較佳。在 VR 與性別、學校教派方面，不論性別或種族，VR1 成績較佳，而在 VR 各群中，女生比男生成績優、Roman Catholic 學校成績較佳。

除了平均數外，標準差可以提供變異的資訊。表 1 是各學校在時間 0 的考試平均數與標準差值。從表中很難一眼就得出結論。表 1 的資訊可轉成圖 5a。高平均低標準差的學校的學生比低平均高標準差的學校的學生能力較強同質性較高。此圖的虛線分別為標準差的平均數（橫虛線）及總平均（縱虛線）。此圖的左上部分是學生程度較差異異質性較高的學校，此圖的右上部分是學生程度較好異質性較高的學校，此圖的左下部份是學生能力較差同質性較高的學校，此圖的右下部分學生能力較強異質性較高。圖 5b 是每個學校在時間 1 的平均數及標準差圖，圖 5c 是每個學校在時間 2 的平均數及標準差圖。

散佈圖可用來檢測依變數與連續性獨立變數之間的關係。圖 6 是各校各年平均成績、符合免費午餐學生的比例、VR1 的學生的比例的散佈圖。此圖指出，如同所期望的，符合免費午餐的學生比例與平均成績有反向關係，VR1 的學生比例與平均成績有正向關係。

在多層次資料分析中也必須要解釋學校間的變異。圖 7 是隨機從 3 種學校類別（分層抽樣）選取部分部分學校在時間 0 的考試成績的盒鬚圖。區間較寬的學校學生比區間較窄的學校的學生異質性較高。譬如說學校 42、43 區間較寬，學校 95、31 的區間較窄、女校呈右偏、中位數比男校及男女合校高、大部分男女合校的考試成績分佈對稱。圖 8 為平均成績在 VR 各群、各時間點的多格圖，此圖主要目的在描述每個學校在 VR 的各水準的成長形式，如所預期的，VR1 的成績平均成績較高，從圖中可看出，各學校在 VR 各水準的成長形式有差異，如果有學校間的差異，HLMs/LMEs 是有其必要性。此資料可考慮建立一個較複雜的 HLMs/LMEs：

Level-1（模式一）：

$$\begin{aligned}
 Score_{ij} = & \beta_{0j} + \beta_{1j}ESWI_{ij} + \beta_{2j}Gender_{ij} + \beta_{3j}Time_{ij} + \beta_{4j}FSM_{ij} \\
 & + \beta_{5j}VR_{ij} + \beta_{6j}VR1_{ij} + \beta_{7j}Time_{ij}Gender_{ij} + \beta_{8j}Time_{ij}ESWI_{ij} \\
 & + \beta_{9j}Gender_{ij}ESWI_{ij} + \beta_{10j}FSM_{ij}VR1_{ij} + \beta_{12j}VR_{ij}Gender_{ij} \\
 & + \beta_{13j}VR1_{ij}Gender_{ij} + r_{ij}
 \end{aligned} \tag{6}$$

Level-2

$$\begin{aligned}
 \beta_{0j} = & \gamma_{00} + \gamma_{01}Schden_j + \gamma_{02}Schtpe_j + u_{0j} \\
 \beta_{1j} = & \gamma_{10} + \gamma_{11}Schden_j + \gamma_{12}Schtpe_j + u_{1j} \\
 \beta_{2j} = & \gamma_{20} + \gamma_{21}Schden_j + u_{2j} \\
 \beta_{3j} = & \gamma_{30} + \gamma_{31}Schden_j + \gamma_{32}Schtpe_j + u_{3j} \\
 \beta_{4j} = & \gamma_{40} + \gamma_{41}Schden_j + \gamma_{42}Schtpe_j + u_{4j} \\
 \beta_{5j} = & \gamma_{50} + \gamma_{51}Schden_j + \gamma_{52}Schtpe_j + u_{5j} \\
 \beta_{6j} = & \gamma_{60} + \gamma_{61}Schden_j + \gamma_{62}Schtpe_j + u_{6j}
 \end{aligned} \tag{7}$$

圖 9 為模式一的迴歸殘差盒鬚圖，這是不考慮學校結構(亦即忽略學校的層級性)，從圖中可看出大部分學校的殘差並未以 0 為中心，學校間的區間差異頗大，如學校 47,30 區間較窄，表示模式一較適合解釋此兩校的變異。學校間的區間大小差異頗大，此即顯示 HLMs/LMEs 的必要性。

經過模式簡化過程，公式(9)-(11)為所建議的 HLMs/LMEs 模式。圖 10 為所建議的 HLMs/LMEs 的殘差盒鬚圖，此圖顯示出大部分的殘差集中在 0 附近，學校間區間長短變異不大，顯示出 HLMs/LMEs 比一般迴歸模式(單層次)適合解釋此組資料，亦即資料若顯現出組間差異，採用 HLMs/LMEs 較合適。

Level-1 (模式一)：

$$\begin{aligned} Score_{ij} = & \beta_{0j} + \beta_{1j}ESWI_{ij} + \beta_{2j}Gender_{ij} + \beta_{3j}Time_{ij} + \beta_{4j}FSM_{ij} \\ & + \beta_{5j}VR_{ij} + \beta_{6j}VR1_{ij} + \beta_{7j}FSM_{ij}VR_{ij} + \beta_{8j}VR_{ij}Gender_{ij} + r_{ij} \end{aligned} \quad (9)$$

Level-2

$$\begin{aligned} \beta_{0j} &= \gamma_{00} + \gamma_{01}Schden_j + \gamma_{02}Schtp_e_j + u_{0j} \\ \beta_{1j} &= \gamma_{10} \\ \beta_{2j} &= \gamma_{20} \\ \beta_{3j} &= \gamma_{30} \\ \beta_{4j} &= \gamma_{40} \\ \beta_{5j} &= \gamma_{50} + \gamma_{51}Schden_j + u_{5j} \\ \beta_{6j} &= \gamma_{60} \\ \beta_{7j} &= \gamma_{70} \\ \beta_{8j} &= \gamma_{80} \end{aligned} \quad (10)$$

將第二層模式代入第一層，則可得混合模式：

$$\begin{aligned} Score_{ij} = & \gamma_{00} + \gamma_{10}ESWI_{ij} + \gamma_{20}Gender_{ij} + \gamma_{30}Time_{ij} + \gamma_{40}FSM_{ij} \\ & + \gamma_{50}VR_{ij} + \gamma_{60}VR1_{ij} + \gamma_{70}FSM_{ij}VR_{ij} + \gamma_{80}VR_{ij}Gender_{ij} \\ & + \gamma_{51}Schden_jVR_{ij} + u_{0j} + u_{5j}VR_{ij} + r_{ij} \end{aligned} \quad (11)$$

圖 11 為主體內殘差的常態圖，從圖中可看出曲線不偏離截距 0 斜率 1 的直線，因此殘差近於常態分配。圖 12 為隨機效果的常態圖，VR 隨機效果的曲線不偏離截距 0 斜率 1 的直線，因此近於常態分配，其中學校 42 為異常值。截距的隨機效果曲線雖略有突起，但偏離截距 0 斜率 1 的直線不遠，因此近於常態分配。

圖 13 為隨機效果的散佈圖，從圖中可看出，截距及 VR 的隨機效果為正相關，這也隱含了正定的變異—共變異矩陣會比隨機效果間無相關的變異—共變異矩陣合適。

結論與建議

多層次資料的統計分析，如果只是以統計量來顯現，不容易窺得分析的全貌，必須

輔以視覺圖方法才能獲得全象。多層次資料有其特性(主體本身及主體間的有變異的特性),因此視覺圖方法在多層次資料分析上須依循此項特性發展出準則。

視覺圖方法於多層次資料的重要性可從資料探索分析、模式建立、及模式評估等三方面來探討：

1. 資料探索分析：這就是統計分析的首要工作。然而此工作常被研究者所忽略、簡化或省略。以視覺圖來作資料探索有下列優點：

(1). 能協助研究者獲得較多有關於原始資料的特性,如果在沒有理論基礎來引導建立模式時(guide model formulation),則以視覺圖來作資料探索特別有用。

(2). 增進對摘要統計後所隱含的現象有更深入的了解。摘要統計主要是以數值來顯示資料的特性,如果能以視覺圖來配合描述,將更有助於了解原始資料。譬如平均數、眾數、中位數、峰度係數、及偏度係數常用來描述資料分佈情形,但如能配合視覺圖,將更有助於對資料的了解。

(3). 偵測模式的可能曲線的模式：在資料探索分析時,從應變數與自變數的關係可提供有關模式曲線模式的線索,如一次、二次、多次、或指數。

(4). 激發新的假設：在建立模式時,可能預設的假設是模式的曲線是線性,但如資料探索時顯示出二次曲線的可能性,此時可考慮增加二次曲線的假設。

(5). 增加對顯著考驗結果的了解：如果兩群體具有顯著差異,若能以視覺圖來顯示,則更能顯示出兩群體的差異情形。

(6). 提出可能會顯著的自變數或有助於解釋應變數的自變數。

(7). 協助選擇合適的統計模式,如標準複迴歸即可或須採用 HLMs/LMEs。若採用 HLMs/LMEs,則何種次模式較合適,最初的固定效果模式應包含那些變數。HLMs/LMEs 的模式建立較複雜,若能以視覺圖方法先行作資料探索分析,不但可增加對資料的了解,並能省略建立模式去測試其他不必要的模式。

(8). 找出異常的主體。

2. 建立模式：

(1). 協助選擇具隨機效果的獨立變數：HLMs/LMEs 同時具固定效果及隨機效果,但是並非所有的變數均須有隨機效果。Pinheiro & Bates (1995) 指出,隨機效果的數量過多,不但造成解釋困難,而且在估計時模式也不容易收斂(Converge),唯有具有主體間變異(between-subjects variability)的變數才須設為隨機效果。

(2). 協助建立隨機效果及殘差的共變異模式(covariance models):隨機效果的共變異模式有許多種,如對角線(diagonal),集區對角線(block-diagonal)等;又如長期性資料的殘差常具有異質性及相依性,此時如能輔以視覺圖,將可更有效的找出合宜的共變模式,省略不必要的測試。

3. 模式評估：模式建立後,常以某些統計數值(如判別係數 R^2)來顯示模式的適切性。然而,這些數值有時並無法真正顯示出模式的良好與否,因此必須輔以視覺圖。其他假設檢定,如常態分配,均質性輔以圖形(如殘差圖、常態機率圖)會更貼切、更容易了解。在 HLMs/LMEs 模式評估中,也可將每個個體的母體預估曲線 (population prediction curves) 組內預估曲線 (within-group prediction curves) 及觀察值 (observed

values), 同時列於一張圖上以觀察模式是否足以代表觀察值。也可比較每個受試者的母體預估曲線、組內預估曲線, 找出組內預估曲線非常低於或高於母體預估曲線的受試者、以對這些受試者作進一步的研究。

參考文獻

- Draper, D. (1995). Inference and hierarchical modeling in the social science. *Journal of Educational and Behavioral Statistics*, 20, 115-147.
- De Leeuw, J., & Kreft, I. G. (1995). Questioning multilevel models. *Journal of Educational and Behavioral Statistics*, 20, 171-189.
- Kreft, G. G. (1995). Hierarchical linear models: Problems and prospects. *Journal of Educational and Behavioral Statistics*, 20, 109-113.
- Snijders, T. A. B. & Bosker, R. J. (1999). *Multilevel analysis: An introduction to basic and advanced multilevel modeling*. CA: Sage Publication.
- Venables, W. N. & Ripley, B. D. (1999). *Modern applied statistics with S-Plus* (3rd ed.). New York: Springer-Verlag.
- Verbeke, G., & Molenberghs, G. (2000). *Linear mixed models for longitudinal data*. New York: Springer-Verlag.
- Wang, J. (1999). Reasons for hierarchical linear modeling: A reminder. *The Journal of Experimental Education*, 68, 89-93.

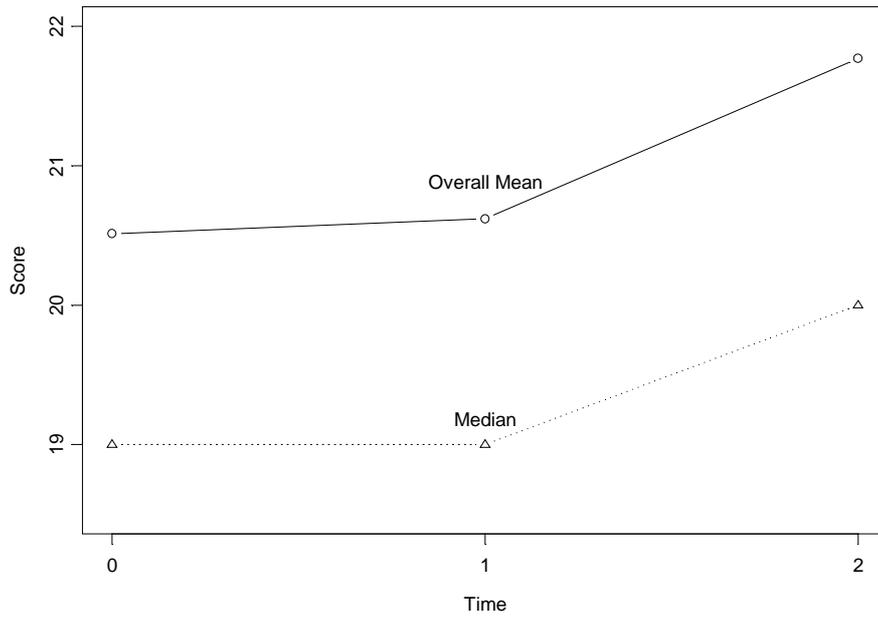


圖 1. 考試成績在每個時間點整體平均數及給中位數的成長型式

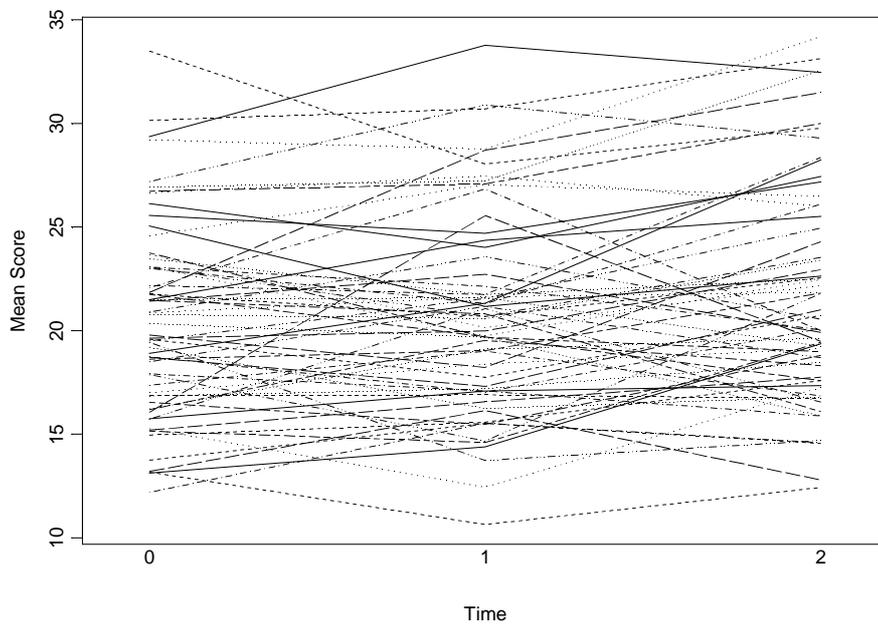
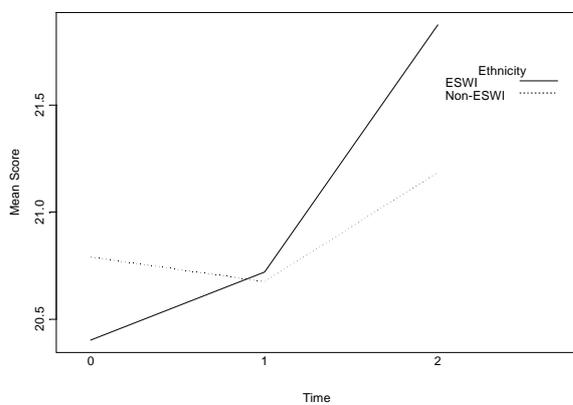
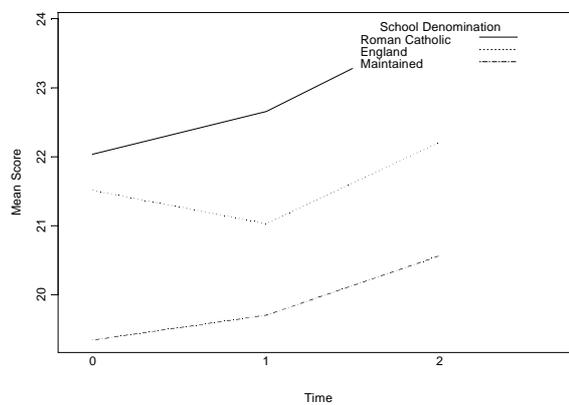


圖 2. 每個學校在在每個時間點整體平均考試成績

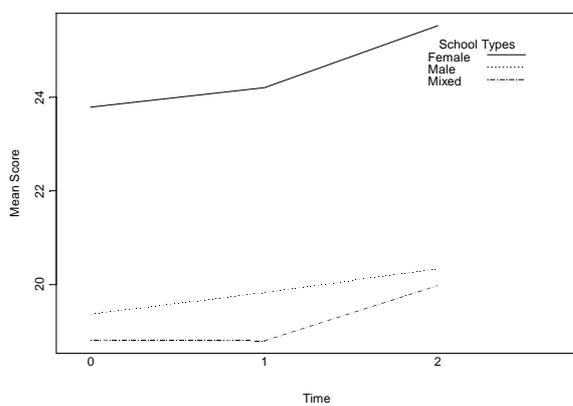
(a)



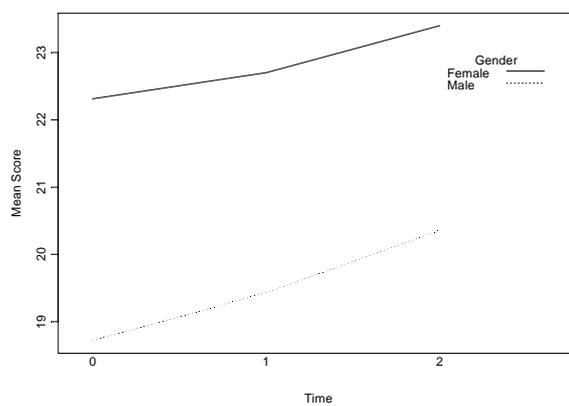
(b)



(c)



(d)



(e)

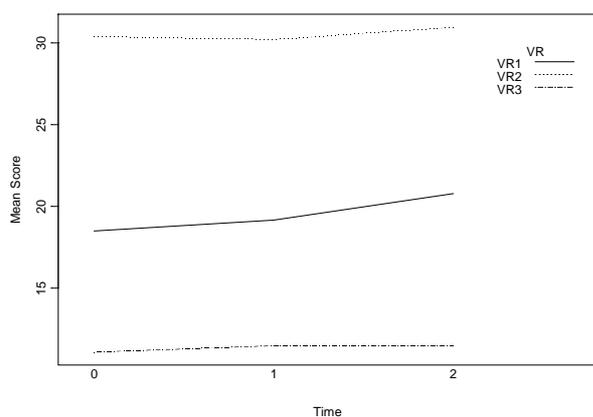
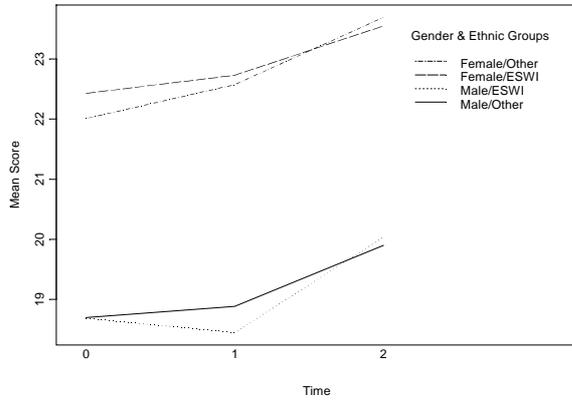
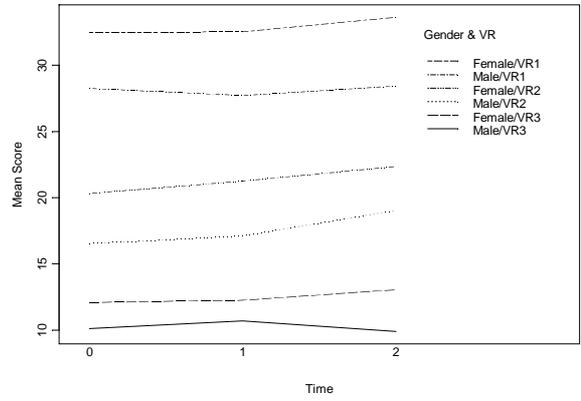


圖 3. 整體平均考試成績在各類別變數（種族、學校教派、學校類別、性別、VR）各個水準，在每個時間點的成长形式

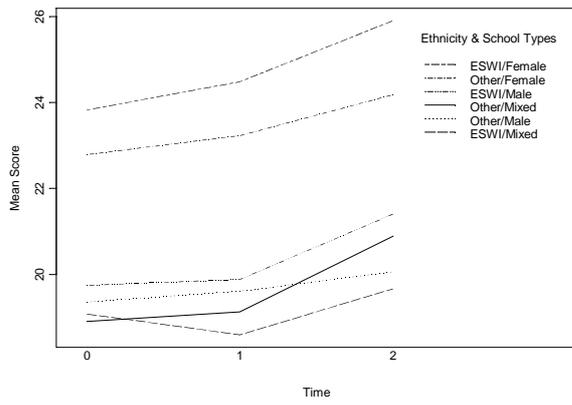
(a).



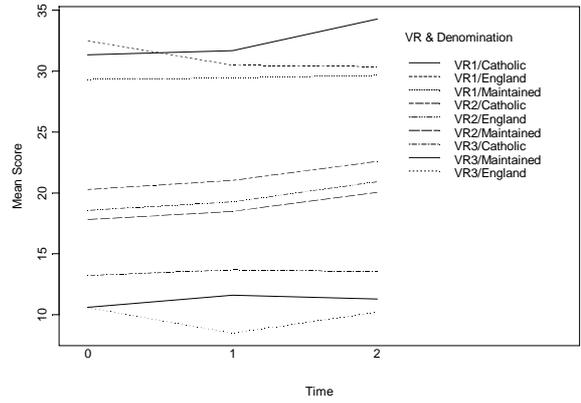
(d).



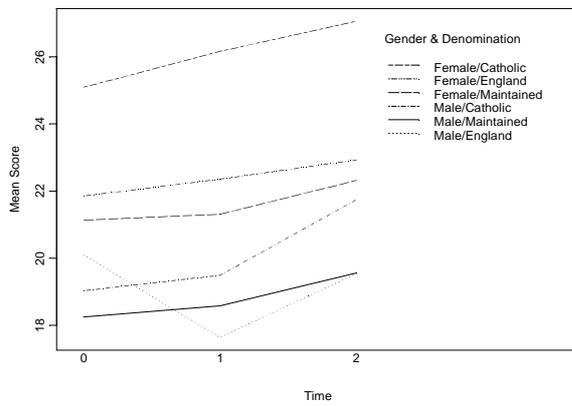
(c).



(e).



(b).



(f).

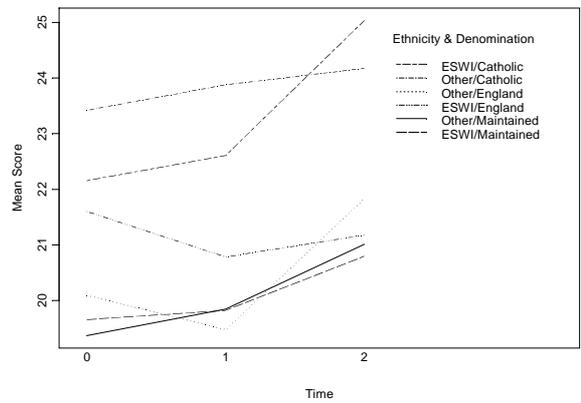
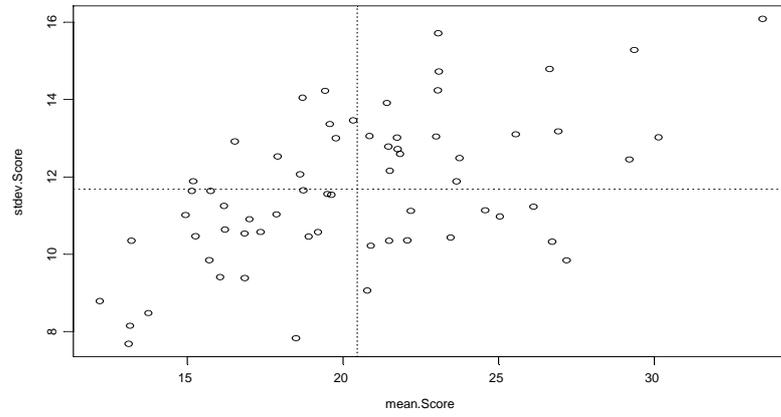
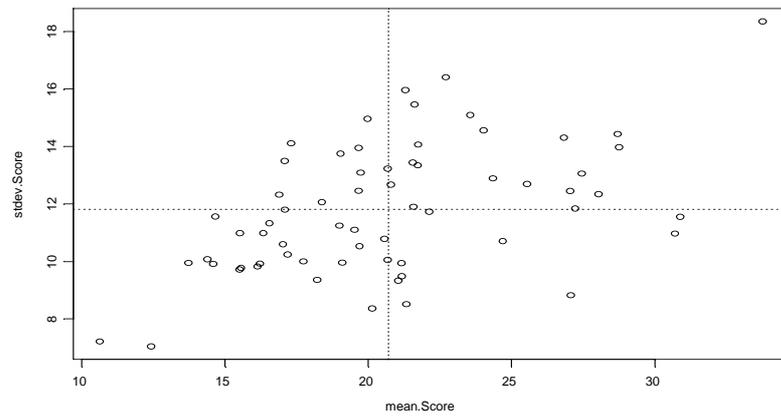


圖 4. 整體平均考試成績在兩兩類別變數間在各時間點的交互作用

(a).



(b).



(c).

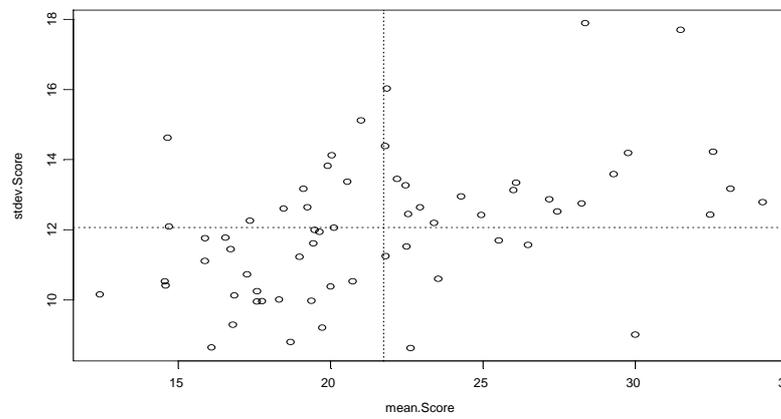


圖 4. 考試成績在 (a).時間 0, (b). 時間 1, 及 (c).時間 2 的平均數及標準差圖

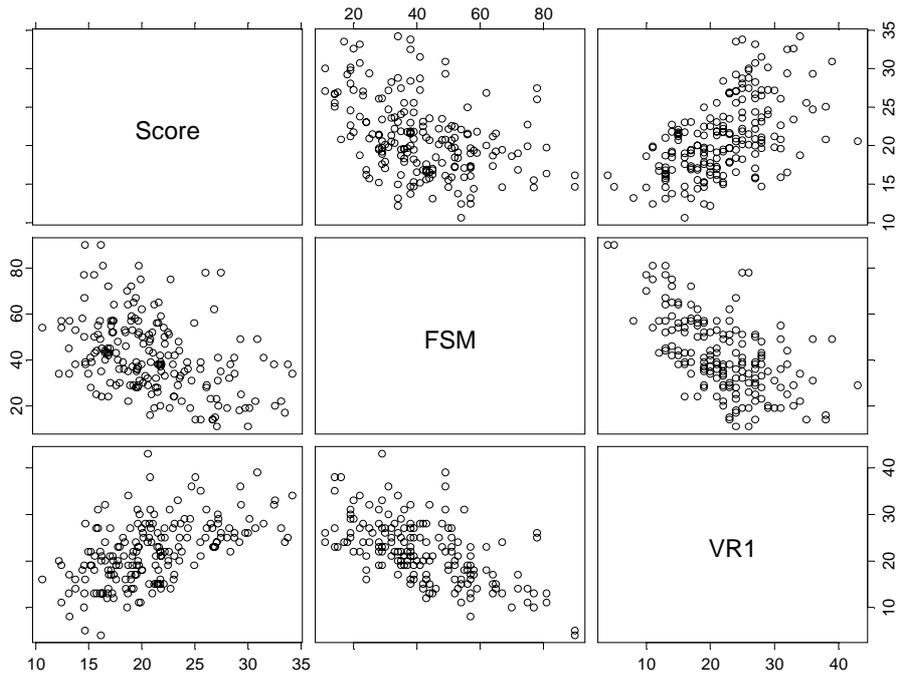


圖 6. 平均成績、符合免費午餐學生的比例、VR1 的學生的比例的散佈圖

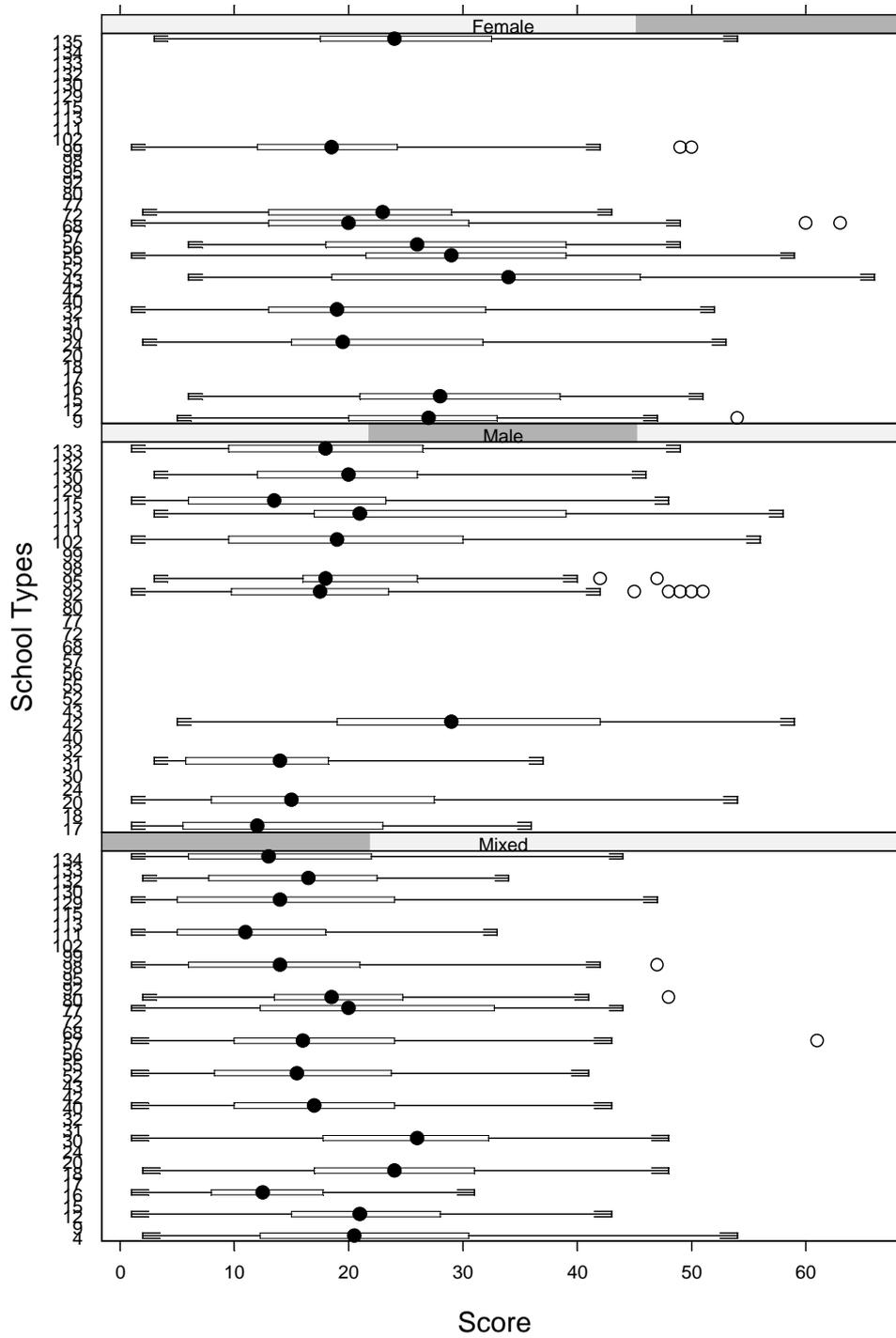


圖 7. 隨機從 3 種學校類別選取部分部分學校在時間 0 的考試成績的盒鬚圖

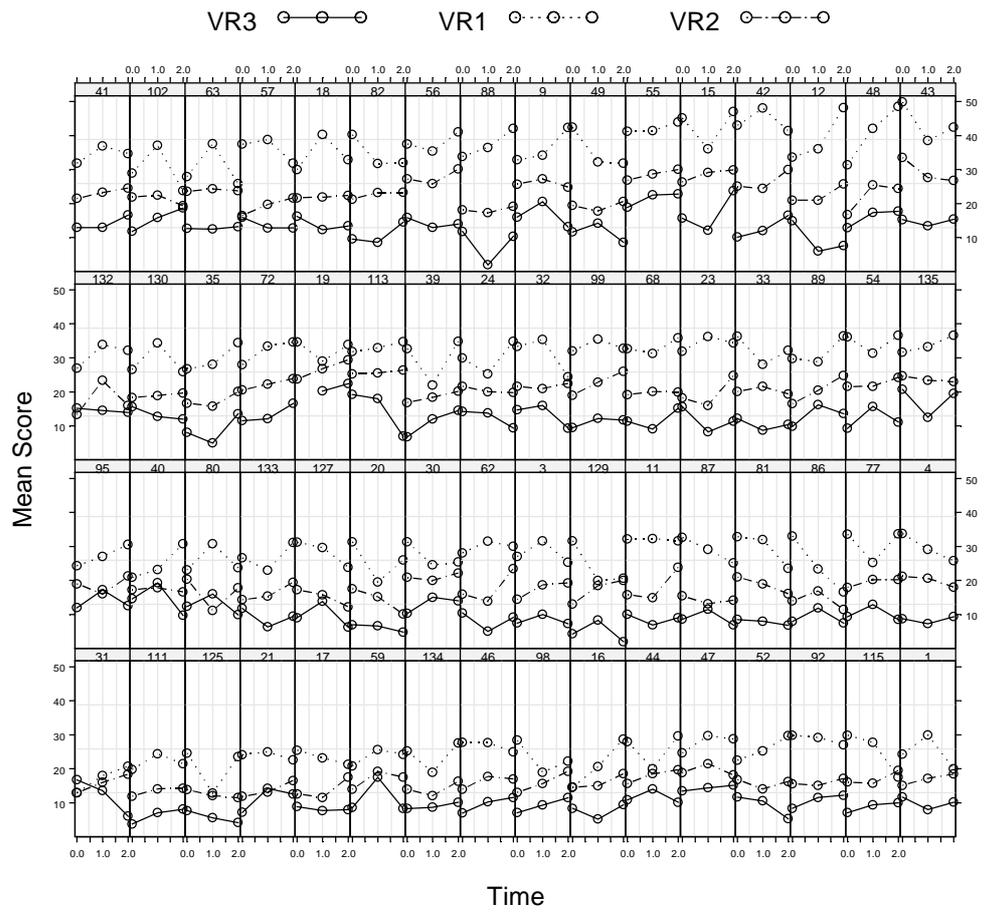


圖 8. 平均成績在 VR 各群、各時間點的多格圖

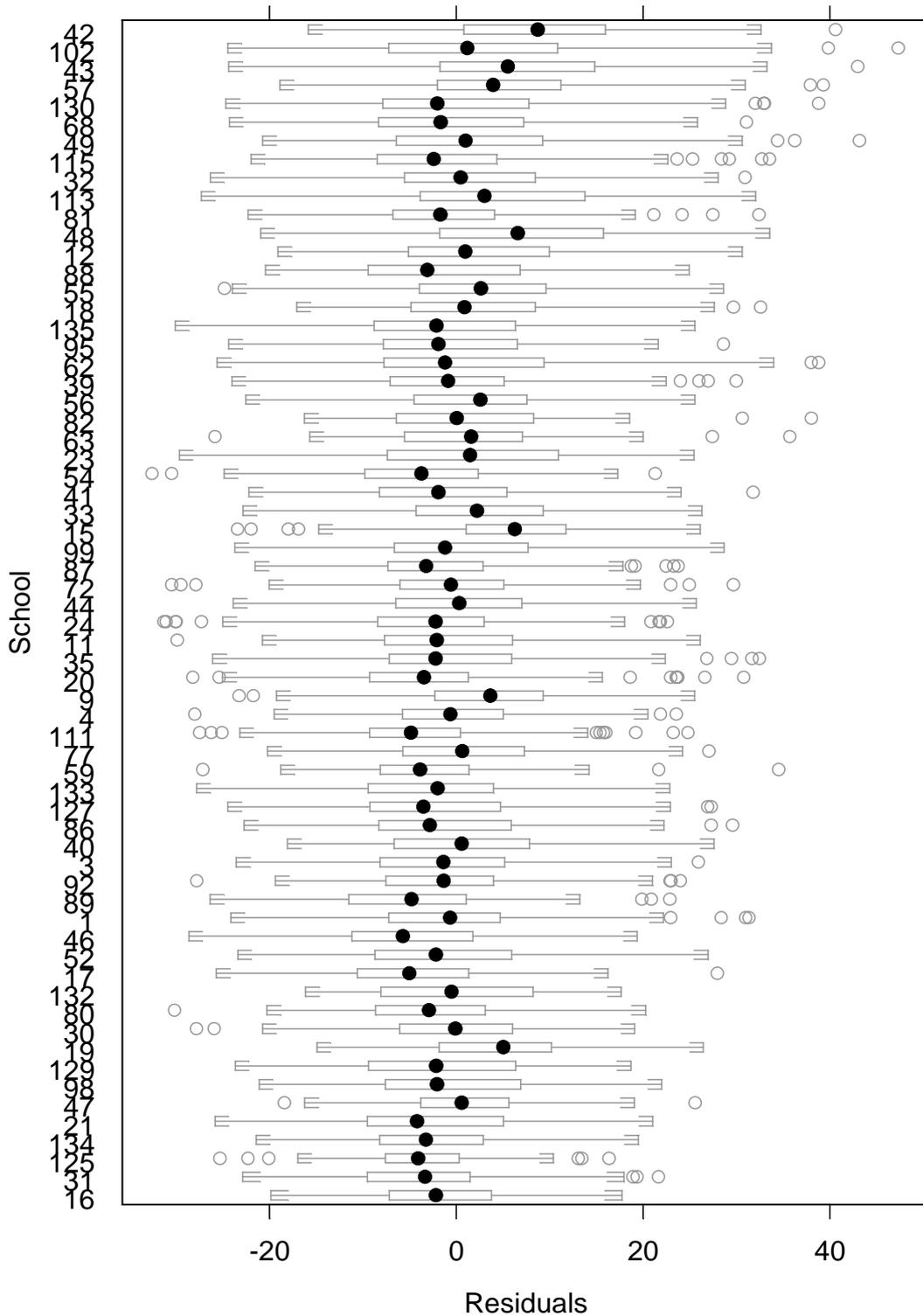


圖 9. 模式一的迴歸殘差盒鬚圖

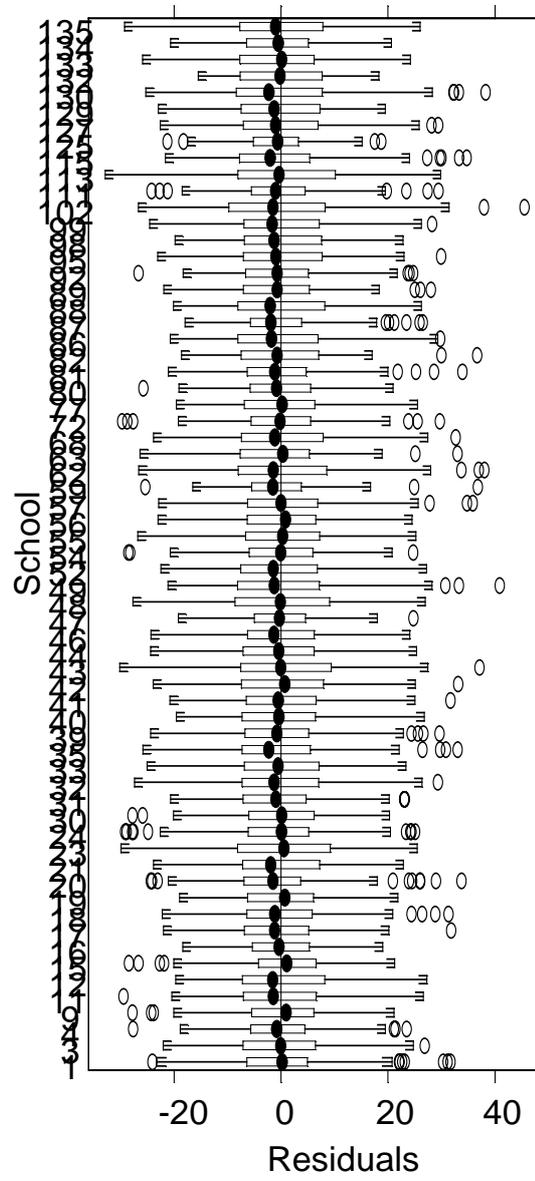


圖 10. 所建議的 HLMs/LMEs 的殘差盒鬚圖

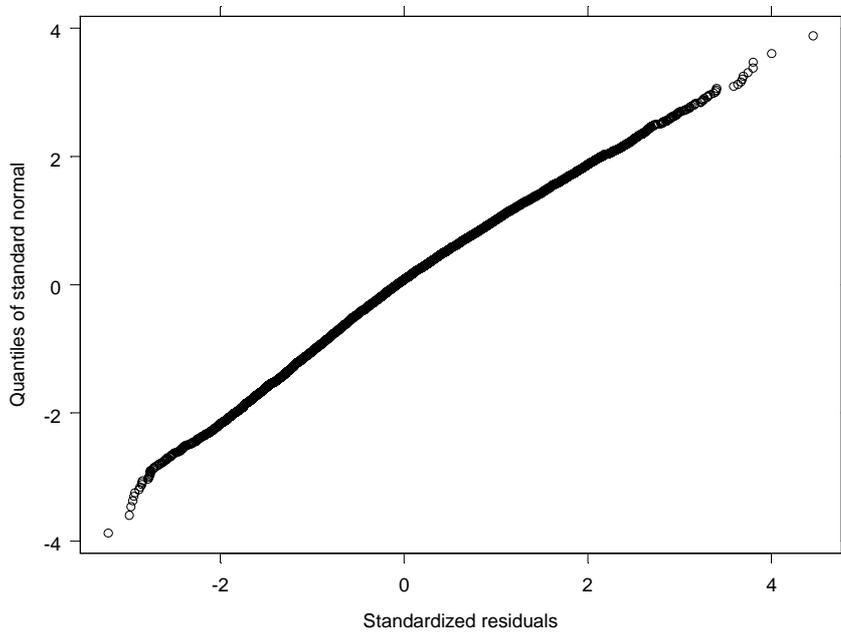


圖 11 主體內殘差的常態圖

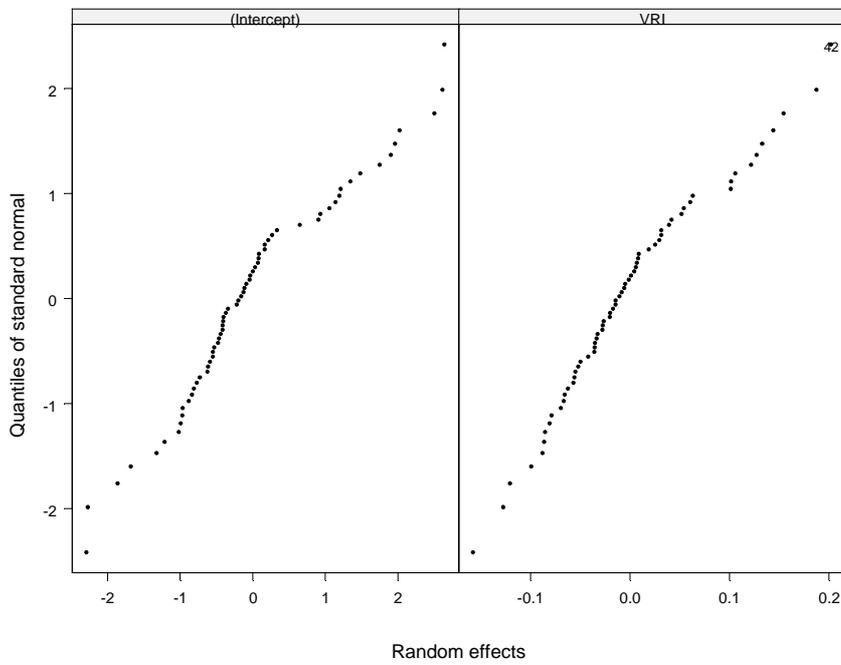


圖 12. 隨機效果的常態圖

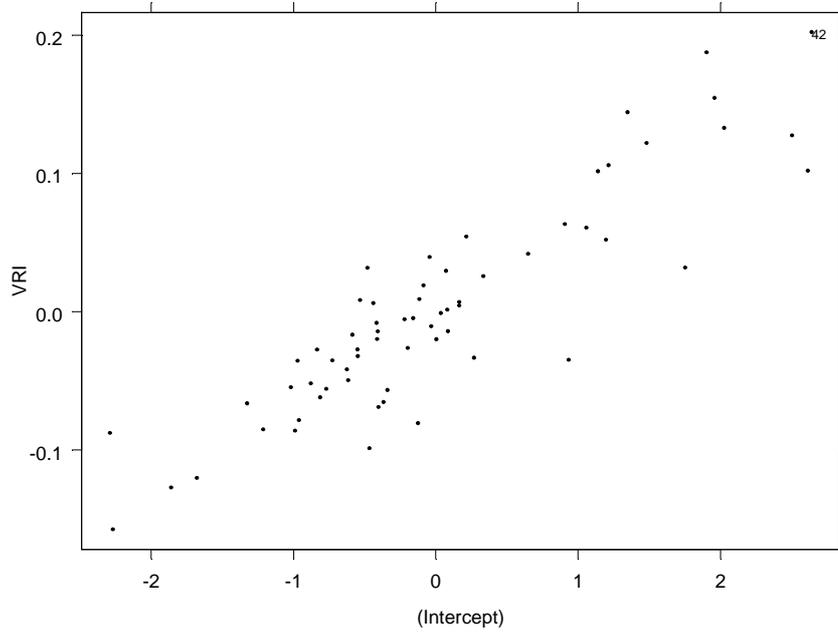


圖 13. 隨機效果的散佈圖